

Problema n.º5: EL VASO (Problema CASIO)

Debido a la ola de calor que estamos sufriendo en Andalucía, como consecuencia del cambio climático, el Servicio Andaluz de Salud (S.A.S.) ha recomendado para evitar posibles deshidrataciones y así mantenernos sano, la ingesta diaria de 6 vasos de agua.

Las dimensiones del vaso estándar tomado como referencia son:

- diámetro del fondo del vaso 6 cm.
- diámetro de la boca del vaso 8 cm.
- altura del vaso 9 cm.



¿Qué cantidad de botellas de agua de 1,5 litros cada una debo comprar si quiero tener el agua suficiente para el consumo recomendado por el S.A.S. durante una semana?

Razona tu respuesta.

Solución:

Para calcular la cantidad de botellas que necesitamos comprar debemos conocer en primer lugar la capacidad de la botella y del vaso en las mismas unidades, en este caso lo haremos en cm^3 .

$$\text{Capacidad botella } 1,5 \text{ litros} = 1,5 \text{ dm}^3 = 1500 \text{ cm}^3$$

$$\text{Capacidad vaso} = V_{\text{vaso}}$$

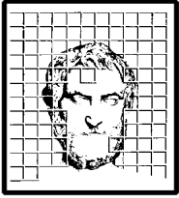
Como el vaso tiene forma de tronco de cono para averiguar su volumen tendremos que hallar los volúmenes del que sería el cono completo y del cono deficiente (trozo que se le ha suprimido)

$$V_{\text{vaso}} = V_{\text{tronco de cono}} = V_{\text{cono completo}} - V_{\text{cono deficiente}} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H}{3} - \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

Para averiguar los volúmenes de los conos conocemos los radios de las bases de los mismos pero además necesitamos la medida de sus alturas; para ello vamos a realizar un dibujo de la figura que se forma con los radios, alturas y generatrices de estos dos conos.

Al observar la figura vemos que se han formado dos triángulos en posición de Thales, por lo cual estos triángulos son semejantes y sus lados proporcionales.

El triángulo menor (cono deficiente) tiene de base 3 cm y de altura x cm.



XXXVII OLIMPIADA MATEMÁTICA THALES
Fase Regional
12 de mayo de 2022



Número:

El triángulo mayor (cono completo) tiene de base 4 cm y de altura $(x+9)$ cm.

Para calcular las alturas establecemos la siguiente proporción:

$$\frac{3}{x} = \frac{4}{x+9}$$

Aplicando la propiedad fundamental de las proporciones y resolviendo la ecuación resultante obtendremos el valor de x (altura cono deficiente):

$$4x = 3(x + 9); \quad 4x = 3x - 27; \quad 4x - 3x = 27; \quad x = 27$$

La altura del cono deficiente mide 27 cm y la altura del cono completo será $x + 9 = 27 + 9 = 36$ cm.

Procedemos a continuación a calcular los volúmenes:

$$V_{\text{cono completo}} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H}{3} = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 36}{3} = 192\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{cono deficiente}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 27}{3} = 81\pi \text{ cm}^3$$

El volumen del vaso es:

$$V_{\text{vaso}} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H}{3} - \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = 192\pi - 81\pi = 111\pi \cong 348,7168 \text{ cm}^3$$

Número de vasos bebidos en 1 semana = 6 vasos/día · 7 días = 42 vasos

Agua bebida en 1 semana = 42 vasos · 348,7168 cm³/vaso = 14646,1056 cm³

Número de botellas en 1 semana = 14646,1056 cm³ : 1500 cm³/bot = 9,76407 bot

Como el número de botellas deben ser un número entero hacemos una aproximación por exceso: 9,76407 botellas \cong 10 botellas

*Cada uno debe comprar un total de **10 botellas** para tener el agua que necesita ingerir en una semana.*

